模块二 常用逻辑用语（★★）

内容提要

常用逻辑用语包括充分条件和必要条件、全称量词命题和存在量词命题两部分内容，有关考题由于涉及其它板块的知识，所以有一定的综合性，下面先归纳本节涉及到的一些知识点.

1．充分条件、必要条件的判断

概念：命题“若 p，则 q”为真命题，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件	
$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$	p 是 q 的充分不必要条件
$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的必要不充分条件
$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的充要条件，记作 $p\Leftrightarrow q$
$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$	p 是 q 的既不充分也不必要条件

2．集合角度看充分条件和必要条件：若 $A\quad B$，则 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件. 我们将这一结论简记为“小可推大，大不推小”.

3．含有一个量词的命题的否定：

①全称量词命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”的否定为“$\exists x\in M$，$\neg p(x)$”.

②存在量词命题“$\exists x\in M$，$p(x)$”的否定为“$\forall x\in M$，$\neg p(x)$”.

4．命题及其否定的真假关系：命题 p 与该命题的否定的真假性必定相反.

典型例题

类型Ⅰ：判断充分条件、必要条件

【例 1】设 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x-1|<1$”是“$\dfrac{x+4}{x-5}<0$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

解析：所给的两个不等式都能解，先把不等式解出来再看，

由 $|x-1|<1$ 可得 $-1<x-1<1$，所以 $0<x<2$，

分式不等式 $\dfrac{x+4}{x-5}<0$ 怎么解？要讨论 $x-5$ 的正负，两端乘以 $x-5$ 吗？其实不用，它等价于 $(x+4)(x-5)<0$，因为二者的要求相同，都是 $x+4$ 与 $x-5$ 异号，故两个不等式必定同解，

由 $\dfrac{x+4}{x-5}<0$ 可得 $(x+4)(x-5)<0$，所以 $-4<x<5$，

故问题等价于判断“$0<x<2$”是“$-4<x<5$”的什么条件，

若 $0<x<2$，则必有 $-4<x<5$，所以充分性成立；

若 $-4<x<5$，则不一定有 $0<x<2$，例如，$x=-1$ 满足 $-4<x<5$，但不满足 $0<x<2$，故必要性不成立；

所以“$|x-1|<1$”是“$\dfrac{x+4}{x-5}<0$”的充分不必要条件.

答案：A

【反思】若 $A\quad B$，则 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，简称“小推大”.

【变式 1】若 a，b 为非零实数，则“$2^a > 2^b$”是“$\ln a^2 > \ln b^2$”的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件　　（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

解析：两个不等式都不能解，且彼此关系不明朗，可先把它们化简再看，

因为 $y = 2^x \nearrow$，所以 $2^a > 2^b \Leftrightarrow a > b$，又 $y = \ln x$ 也 $\nearrow$，所以 $\ln a^2 > \ln b^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$，

于是问题等价于判断“$a > b$”是“$|a| > |b|$”的什么条件，下面分析两者能否互推，

当 $a > b$ 时，$|a| > |b|$ 不一定成立，例如 $a = 1$，$b = -2$ 时，满足 $a > b$，但 $|a| < |b|$，所以充分性不成立；

当 $|a| > |b|$ 时，$a > b$ 也不一定成立，例如 $a = -2$，$b = 1$ 时，满足 $|a| > |b|$，但 $a < b$，所以必要性不成立；

故“$2^a > 2^b$”是“$\ln a^2 > \ln b^2$”的既不充分也不必要条件.

答案：D

【反思】判断两个复杂不等式之间的充分条件、必要条件关系，可先通过等价变形将不等式化简再看.

【变式 2】已知 $a, b \in \mathbf{R}$，则“$a > b$”的一个充分不必要条件为（　　）

（A）$a^2 > b^2$　　（B）$\ln a > \ln b$　　（C）$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$　　（D）$2^a > 2^b$

解析：注意审题，选项是 $a > b$ 的充分不必要条件，所以应该是选项能推出 $a > b$，但 $a > b$ 不能推出选项，可将各选项化简再看，

A 项，$a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$，由上面的变式 1 可知 $|a| > |b|$ 是 $a > b$ 的既不充分也不必要条件，故 A 项错误；

B 项，$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b > 0$，于是只需判断 $a > b > 0$ 是否为 $a > b$ 的充分不必要条件，

当 $a > b > 0$ 时，$a > b$ 成立；但当 $a > b$ 时，$a > b > 0$ 不一定成立，例如 $a = -1$，$b = -2$ 时，满足 $a > b$，但不满足 $a > b > 0$，所以 $a > b > 0$ 是 $a > b$ 的充分不必要条件，故 B 项正确；

C 项，由 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不能得出 $a > b$，例如，取 $a = -1$，$b = 1$，满足 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，但 $a < b$，

所以 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不是 $a > b$ 的充分条件，故 C 项错误；

D 项，$2^a > 2^b \Leftrightarrow a > b$，所以 $2^a > 2^b$ 是 $a > b$ 的充要条件，故 D 项错误.

答案：B

【总结】判断 p 是 q 的充分条件、必要条件这类题，可直接判断 p，q 能否互推，也可将它们分别进行等价转化后再判断.

类型Ⅱ：根据充分条件、必要条件求参

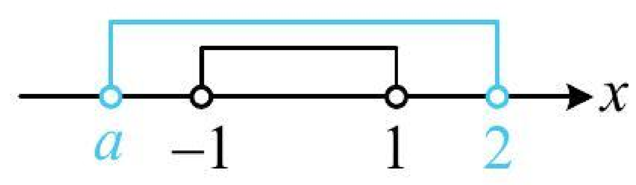
【例 2】已知关于 x 的不等式 $(x-a)(x-2) < 0$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1 < x < 1$，则实数 a 的取值范围为_____.

解析：由所给不等式容易得到对应的集合，故可将已知条件翻译成集合间的包含关系，再求 a 的范围，

记不等式 $(x-a)(x-2) < 0$ 的解集为 A，集合 $B = \{x \mid -1 < x < 1\}$，

由题意，$-1 < x < 1$ 是 $(x-a)(x-2) < 0$ 的充分不必要条件，所以 $B \quad A$，如图，应有 $a \le -1$.

答案：$(-\infty,-1]$



【反思】当两个集合有包含关系时，“在小集合里”是“在大集合里”的充分不必要条件，简记为“小可推大，大不推小”.

【变式 1】若“$-2<x<m$”是“$x^2-x-6<0$”的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围是_____.

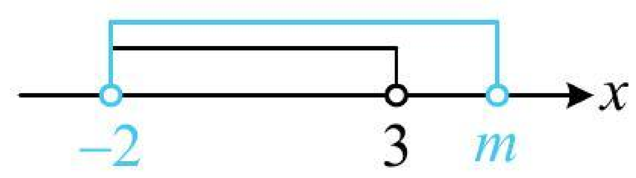
解析：不等式的解集容易写出，故可翻译成集合间的包含关系，再求 m 的范围，

$x^2-x-6<0\Leftrightarrow(x+2)(x-3)<0\Leftrightarrow-2<x<3$，记 $A=\{x\mid-2<x<3\}$，$B=\{x\mid-2<x<m\}$，

因为 $-2<x<m$ 是 $x^2-x-6<0$ 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow x^2-x-6<0$ 是 $-2<x<m$ 的充分不必要条件，

所以 A　B，如图，应有 $m>3$，此处 m 不能等于 3，否则两个不等式应为充要条件关系.

答案：$(3,+\infty)$



【反思】p 是 q 的必要不充分条件 $\Leftrightarrow q$ 是 p 的充分不必要条件 $\Leftrightarrow q$ 代表的范围　p 代表的范围；对必要不充分条件不熟悉的同学可按此先转化为充分不必要条件，再分析参数范围.

【变式 2】关于 x 的不等式 $ax^2-2x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充要条件是（　　）

（A）$0<a<1$　　（B）$0\le a<1$　　（C）$a>1$　　（D）$a<0$ 或 $a>1$

解析：注意到平方项系数为字母，故需讨论其等于 0 的情形，

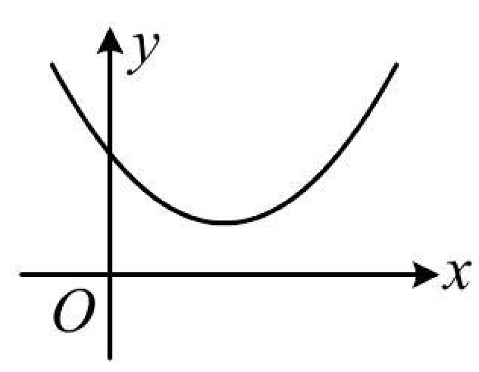
当 $a=0$ 时，$ax^2-2x+1>0$ 即为 $-2x+1>0$，该不等式只在 $x<\dfrac{1}{2}$ 时成立，不合题意；

当 $a\ne0$ 时，要使 $ax^2-2x+1>0$ 恒成立，如图，需满足二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 开口向上，

且与 x 轴没有交点，所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4-4a<0\end{cases}$，解得：$a>1$；

综上所述，$ax^2-2x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充要条件是 $a>1$.

答案：C



【总结】由充分不必要、必要不充分条件求参，可用集合的包含关系来分析；由充要条件求参，则直接等价考虑.

类型III：全称量词命题、存在量词命题的否定

【例 3】命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3-x^2+1\le0$ 的否定是（　　）

（A）$\exists x \notin \mathbf{R}$，$x^3 - x^2 + 1 > 0$　　（B）$\exists x \in \mathbf{R}$，$x^3 - x^2 + 1 \le 0$

（C）$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^3 - x^2 + 1 > 0$　　（D）$\exists x \in \mathbf{R}$，$x^3 - x^2 + 1 > 0$

解析： 否定全称量词命题，先将“$\forall$”改为“$\exists$”，再否定结论，

命题 p 的否定为：$\exists x \in \mathbf{R}$，$x^3 - x^2 + 1 > 0$.

答案： D

【例 4】设命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}$，$x^2 + 1 = 0$，则命题 p 的否定是（　　）

（A）$\forall x \notin \mathbf{R}$，$x^2 + 1 = 0$　（B）$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 + 1 \ne 0$　（C）$\exists x \notin \mathbf{R}$，$x^2 + 1 = 0$　（D）$\exists x \in \mathbf{R}$，$x^2 + 1 \ne 0$

解析： 否定存在量词命题，先将“$\exists$”改为“$\forall$”，再否定结论，

命题 p 的否定为：$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 + 1 \ne 0$.

答案： B

【总结】 否定全称量词命题，先把“任意”改为“存在”，再否定结论；否定存在量词命题，先把“存在”改为“任意”，再否定结论.

类型Ⅳ：判断全称量词命题、存在量词命题的真假

【例 5】（多选）下列命题中，真命题有（　　）

（A）$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 - x + \frac{1}{4} \ge 0$　　（B）$\exists x > 0$，$\ln x + \frac{1}{\ln x} < 2$

（C）$\exists x \in \mathbf{R}$，$e^x < 2x$　　（D）$\forall x \in \mathbf{R}$，$2^x \ge x^2$

解析： A 项，$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 \ge 0$，故 A 项为真命题；

B 项，观察发现当 $\ln x < 0$ 时，所给不等式成立，故只需找到使 $\ln x < 0$ 的一种情形，即可判断该命题为真，

当 $x = e^{-1}$ 时，$\ln x + \frac{1}{\ln x} = \ln e^{-1} + \frac{1}{\ln e^{-1}} = -2 < 2$，故 B 项为真命题；

C 项，$e^x < 2x$ 为超越不等式，不易直接判断，可构造函数求导分析，

设 $f(x) = e^x - 2x (x \in \mathbf{R})$，则 $f'(x) = e^x - 2$，所以 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$，$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$，

从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上$\searrow$，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上$\nearrow$，故 $f(x) \ge f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 > 0$，

所以 $\forall x \in \mathbf{R}$，都有 $e^x - 2x > 0$，即 $e^x > 2x$，故 C 项为假命题；

D 项，当 $x \to -\infty$ 时，$2^x \to 0$，$x^2 \to +\infty$，$2^x \ge x^2$ 不成立，故所给命题为假命题，下面举个反例，

当 $x = -1$ 时，$2^x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$，$x^2 = (-1)^2 = 1$，所以 $2^x < x^2$，故 D 项为假命题.

答案： AB

【总结】 判断全称量词命题为真，需论证所有情形下结论都成立，而要判断其为假，则只需寻找一种使结论不成立的反例即可；判断存在量词命题为真，只需寻找一种使结论成立的情况即可，而要判断其为假，则需证明所有情形下，结论都不成立.

类型Ⅴ：由全称量词命题、存在量词命题的真假求参

【例 6】若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$kx^2-kx-1<0$”是真命题，则实数 k 的取值范围是（　　）

（A）$(-4,0)$　　（B）$(-4,0]$　　（C）$(-\infty,-4]\cup(0,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-4)\cup[0,+\infty)$

解析：平方项的系数为字母，需讨论其是否为 0，当 $k=0$ 时，$kx^2-kx-1<0$ 即为 $-1<0$，满足题意；

当 $k\neq 0$ 时，$kx^2-kx-1<0$ 恒成立等价于 $\begin{cases}k<0\\ \Delta=(-k)^2-4k\cdot(-1)<0\end{cases}$，解得：$-4<k<0$；

综上所述，实数 k 的取值范围是 $(-4,0]$.

答案：B

【变式 1】已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$3^x+3^{-x}>a$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

解析：直接由命题 p 为假不易求 a 的范围，而 p 为假等价于 p 的否定为真，故可从反面考虑，

因为 p 为假命题，所以 p 的否定“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $3^x+3^{-x}\le a$”为真命题，所以 $a\ge(3^x+3^{-x})_{\min}$，

因为 $3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$，当且仅当 $3^x=3^{-x}$，即 $x=0$ 时取等号，所以 $(3^x+3^{-x})_{\min}=2$，故 $a\ge 2$.

答案：$[2,+\infty)$

【反思】①全称量词命题或存在量词命题与其否定的真假性一定相反；②遇到根据命题为假求参的问题，可考虑转化为由该命题否定为真来分析.

【变式 2】若命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$ax^2+2ax+1\le 0$ 是假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

解析：正面考虑命题 p 为假，不易求 a 的范围，故可从反面考虑，p 为假等价于 p 的否定为真，

由题意，命题 p 的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+2ax+1>0$，且此命题为真命题，平方项系数为字母，需讨论，

当 $a=0$ 时，$ax^2+2ax+1>0$ 即为 $1>0$，恒成立，满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，$ax^2+2ax+1>0$ 恒成立等价于 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4a^2-4a<0\end{cases}$，解得：$0<a<1$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[0,1)$.

答案：$[0,1)$

【变式 3】已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax+1>0$ 恒成立，命题 $q:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+a=0$，若 p，q 中有且仅有一个为真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

解析：p 与 q 有且只有一个为真命题有 p 真 q 假、p 假 q 真两种情况，分别讨论即可，

当 p 真 q 假时，首先，p 为真命题，所以 $ax^2-ax+1>0$ 恒成立，平方项系数为字母，需讨论其是否为 0，

①若 $a=0$，则 $ax^2-ax+1>0$ 即为 $1>0$，显然恒成立；

②若 $a\neq 0$，则 $ax^2-ax+1>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta=(-a)^2-4a<0\end{cases}$，解得：$0<a<4$；

综合①②可得当 p 为真命题时，应有 $0\le a<4$；

其次，q 为假命题，所以 q 的否定“$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2+x+a \neq 0$”为真命题，

从而方程 $x^2+x+a=0$ 没有实数解，故 $\Delta=1-4a<0$，解得：$a>\frac{1}{4}$，

与前面 p 为真命题的 $0 \leq a<4$ 取公共部分可得 $\frac{1}{4}<a<4$；

p 真 q 假分析完了，再看 p 假 q 真的情形，无需重复计算，在 p 真 q 假的结果中各自取补集即可，

由前面的分析过程知当 p 为真命题时，$0 \leq a<4$，所以 p 为假命题时应有 $a<0$ 或 $a \geq 4$，

同理，当 q 为假命题时，有 $a>\frac{1}{4}$，所以当 q 为真命题时，应有 $a \leq \frac{1}{4}$，所以当 p 假 q 真时，$a<0$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0) \cup (\frac{1}{4},4)$.

答案：$(-\infty,0) \cup (\frac{1}{4},4)$

【反思】当两个命题一真一假时，可选其中一种情况来求参数范围，另一种情形直接在此基础上各自取补集再考虑即可.

强化训练

1.（2023·浙江模拟·★）“$\alpha=60^{\circ}$”是“$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

2.（2022·陕西模拟·★）若 x，y 为正实数，则“$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$”是“$\log_2 x>\log_2 y$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

3.（2023·四川成都一模·★★）已知直线 l, m 和平面 α，β，若 $\alpha \perp \beta$，$l \perp \alpha$，则“$l \perp m$”是“$m \perp \beta$”的（　　）

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件　（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

答案：B

4.（2023 • 全国甲卷 • ★★）“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的（　　）

（A）充分条件但不是必要条件　　（B）必要条件但不是充分条件

（C）充要条件　　（D）既不是充分条件也不是必要条件

5.（2022 • 天津一模 • ★★）在等比数列$\{a_n\}$中，公比为q，则“$q>1$”是“$a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)$”的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件　　（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

6.（2023 • 辽宁模拟 • ★★）“对任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$”的一个充分不必要条件是（　　）

（A）$-3<k<0$　　（B）$-3<k\le 0$　　（C）$-3<k<1$　　（D）$k>-3$

7.（2022 • 四川成都期末 • ★）设命题$p:\ln(x-1)<0$，命题$q:a\le x\le a+2$，若p是q的充分不必要条件，则实数a的取值范围是（　　）

（A）$[0,1]$　　（B）$(0,1)$　　（C）$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

8.（2022 • 安徽月考 • ★★）已知集合$A=\{x\,|\,y=\ln(3x^2-7x+4)\}$，$B=\{x\,|\,27^{x+m}-9>0\}$，若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，则实数$m$的取值范围是_____.

9.（2022 • 北京模拟 • ★）已知命题$p:\exists x>5$，$2x^2-x+1>0$，则p的否定为（　　）

（A）$\forall x\le 5$，$2x^2-x+1\le 0$　　（B）$\forall x>5$，$2x^2-x+1\le 0$

（C）$\exists x>5$，$2x^2-x+1\le 0$　　（D）$\exists x\le 5$，$2x^2-x+1>0$

10．（2022•四川眉山模拟•★）命题$p:\forall x\in\mathbf{Q}$，$x^2\in\mathbf{Q}$的否定为（　　）

（A）$\forall x\notin\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　（B）$\forall x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　（C）$\exists x\notin\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$　（D）$\exists x\in\mathbf{Q}$，$x^2\notin\mathbf{Q}$

11．（2022•广西玉林模拟•★★）若命题$p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2(a+1)x+1<0$是假命题，则实数a的取值范围是_____.

12．（2022•河北承德模拟•★★★）命题$p:\exists x\in[-1,1]$，使$x^2+1<a$成立；命题$q:\forall x>0$，$ax<x^2+1$恒成立. 若命题p与q有且只有一个为真命题，则实数a的取值范围是_____.